Soluciones a los ejercicios de clase

1. Estúdiese la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=xE(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.

Los ejercicios de este tipo siempre pueden hacerse de varias formas. Una de ellas consiste en usar los resultados que conocemos sobre la continuidad de la suma, producto, cociente y composición de funciones continuas. De esta manera podemos reducir el estudio de la continuidad de la función dada al de otras funciones más sencillas.

En nuestro caso, la función que nos dan es producto de dos funciones, $f(x)=I(x)\varphi(x)$, donde I es la función identidad y $\varphi=E\circ U$ donde E es la función parte entera y $U(x)=1/x$, $U(0)=0$ (nótese que como $f(0)=0$ hay que *definir* $U(0)$ dándole algún valor, no importa cual). Si $a\neq 0$ es un número real tal que $1/a$ *no* es un número entero, entonces la función U es continua en a, y como E es continua en $U(a)$ (porque la función parte entera es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$), concluimos que la función compuesta $\varphi=E\circ U$ es continua en a y, como la función identidad es continua en todo punto, deducimos que f también es continua en a.

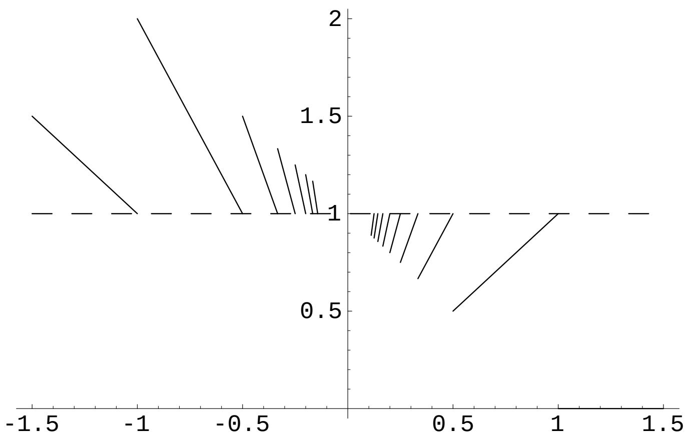
Nótese que no podemos afirmar *a priori* que f sea discontinua en los puntos de la forma $1/n$ donde $n\neq 0$ es un entero. Ello se debe a que *nada puede decirse en general de la composición de una función continua y otra discontinua: unas veces es continua y otras no*.

Estudiemos qué ocurre en un punto de la forma $1/p$ donde $p\geqslant 2$ es un entero (fijo en lo que sigue). Tenemos que $f(1/p)=1$. Para todo $x\in]1/(p-1),1/p[$ se tiene que $p-1<1/x<p$, por lo que $E(1/x)=p-1$ y $f(x)=(p-1)x$, y por tanto

$$f(1/p)-f(x)=1-(p-1)x>1-(p-1)/p=1/p.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_o=1/2p$, *cualquiera sea* $\delta>0$ hay puntos $x\in]1/(p-1),1/p[$ cuya distancia al punto $1/p$ es menor que δ, para los cuales *no se verifica* que $|f(1/p)-f(x)|<\varepsilon_o$. Concluimos que f es discontinua en $1/p$. De forma parecida se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $1/q$ donde $q\leqslant -2$ es un entero. Igualmente se prueba que f es discontinua en los puntos 1 y -1.

Queda por ver qué pasa en 0. Si dibujamos con paciencia (con lápiz y regla) la gráfica de f obtenemos esto:



Parece que f es continua en 0. Para *probarlo* hay que probar que $|f(x)-f(0)|=|f(x)-1|$ es tan pequeño como queramos ($<\varepsilon$) siempre que $|x-0|=|x|$ sea suficientemente pequeño ($<\delta$). Lo usual en estos casos es *trabajar para atrás*. Empezamos *acotando* $f(x)-1$. Recordemos que

$$E(1/x)\leqslant 1/x\leqslant E(1/x)+1 \tag{1}$$

Si $x>0$ podemos multiplicar por x dicha desigualdad para obtener que

$$xE(1/x)\leqslant 1\leqslant xE(1/x)+x.$$

Resulta así que para $x>0$ es:

$$0\leqslant 1-xE(1/x)=f(0)-f(x)\leqslant x \tag{2}$$

Si $x<0$ podemos multiplicar por x la desigualdad (1) para obtener que

$$xE(1/x)\geqslant 1\geqslant xE(1/x)+x.$$

Resulta así que para $x<0$ es:

$$0\geqslant 1-xE(1/x)=f(0)-f(x)\geqslant x \quad \text{es decir} \quad 0\leqslant f(x)-f(0)\leqslant -x \tag{3}$$

De (2) y (3) deducimos que $|f(x)-f(0)|\leqslant|x|$. En consecuencia, dado $\varepsilon>0$, tomamos $\delta=\varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x|<\delta$ entonces $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$. Luego f es continua en 0.
Nótese que ni la función parte entera ni la función U antes definida son continuas en cero y ello no impide que f sí lo sea.

El teorema de localización también puede usarse en este tipo de ejercicios. En nuestro caso, es evidente que para $x>1$ es $f(x)=0$ y para $x<-1$ es $f(x)=-x$. Por tanto la *restricción* de f a los intervalos $]1,+\infty[$ y $]-\infty,-1[$ es continua y, como estos intervalos son *abiertos*, deducimos por el teorema de localización que f es continua en dichos intervalos. De forma parecida podemos razonar con un intervalo del tipo $]1/(n+1),1/n[$ donde $n\in\mathbb{N}$ pues, para $x\in]1/(n+1),1/n[$ se tiene que $f(x)=nx$, luego la restricción de f a dicho intervalo es continua y, por tratarse de un intervalo *abierto*, deducimos que f es continua en $]1/(n+1),1/n[$. Análogamente se razona con un intervalo del tipo $]-1/n,-1/(n+1)[$. El teorema de localización no nos dice qué pasa en los puntos extremos de los intervalos considerados, es decir, en los puntos de la forma $1/n$ donde $n\in\mathbb{Z}^*$, y tampoco en 0. Esos puntos requieren, al igual que hicimos antes, un estudio particular.

2. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x\in\mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por: $\operatorname{dist}(x,A)=\operatorname{ínf}\{|x-a|:a\in A\}$. Pruébese que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)|\leqslant|x-y|$$

Dedúzcase que la aplicación $x\mapsto\operatorname{dist}(x,A)$ es continua.
Teniendo en cuenta que $|a|\leqslant b$ equivale a que $a\leqslant b$ y $-a\leqslant b$, la desigualdad que nos piden probar equivale a estas dos desigualdades:

$$\operatorname{dist}(x,A)-\operatorname{dist}(y,A)\leqslant|x-y| \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(y,A)-\operatorname{dist}(x,A)\leqslant|x-y| \tag{4}$$

Pero es claro que basta con probar una sola de ellas pues entonces cambiando x por y obtenemos la otra (porque $|x-y|=|y-x|$). Probaremos la primera de las dos desigualdades (4). Escribamos la desigualdad en la forma:

$$\operatorname{dist}(x,A)\leqslant|x-y|+\operatorname{dist}(y,A)$$

En todo lo que sigue x e y están fijos. Tenemos que para todo $a \in A$:

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant |x-a| \leqslant |x-y| + |y-a|$$

es decir,

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant |y-a| \quad \text{para todo} \quad a \in A$$

Deducimos que el número $\operatorname{dist}(x,A) - |x-y|$ es un minorante del conjunto $\{|y-a| : a \in A\}$, y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, que es por definición $\operatorname{dist}(y,A)$. Hemos probado así que

$$\operatorname{dist}(x,A) - |x-y| \leqslant \operatorname{dist}(y,A)$$

Que es la desigualdad que queríamos probar.

Es evidente, teniendo en cuenta la desigualdad que acabamos de probar, que la función $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x,A)$ es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x-y| < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x-y| < \varepsilon$. Nótese que, aquí un mismo "δ" vale para todo punto y.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.
Llamemos $\beta = \sup f(\mathbb{R})$. Es claro que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, si f es constante deberá darse la igualdad $f(x) = \beta$ en todo punto x de $\mathbb{R}$. Luego tenemos que probar que, dado $a \in \mathbb{R}$, es imposible que ocurra $f(a) < \beta$. Pero eso es claro, pues si fuera $f(a) < \beta$, entonces tomando $\lambda \in]f(a), \beta[$, por el teorema de conservación del signo aplicado a la función $g(x) = \lambda - f(x)$ en el punto a, deducimos que existe un intervalo abierto $]u,v[$ que contiene al punto a y tal que para todo $x \in]u,v[$ es $g(x) > 0$, es decir, $f(x) < \lambda$. Pero entonces $\sup f(]u,v[) \leqslant \lambda < \beta$ en contradicción con la hipótesis hecha.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.
Hay varias formas de hacer este ejercicio. Por ejemplo, podemos definir

$$u = \sup\{x \in]a,c[: f(x) = 0\}, \quad v = \operatorname{ínf}\{x \in]c,b[: f(x) = 0\}$$

Con ello es fácil probar que $a < u < c < v < b$ y $f(u) = f(v) = 0$ pero f no puede anularse entre u y v, por lo que, al ser $f(c) > 0$, concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.